ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

δ Θεωρητικά θέματα

Ας δούμε την επίλυση ενός παραμετρικού 2x2 γραμμικού συστήματος.

Θέμα **1**

Θα λύσουμε το σύστημα **(Σ)** : $\begin{cases} \lambda x - y = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2y = \lambda \end{cases}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$

Απάντηση

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -2 \end{vmatrix} = -2\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 2)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ \lambda & -2 \end{vmatrix} = -2(\lambda - 1) + \lambda = -(\lambda - 2)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda - 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda^2(\lambda - 1) = \lambda^2(1 - \lambda + 1) = -\lambda^2(\lambda - 2)$$

Αν $D \neq 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 2$

το σύστημα θα δέχεται **μοναδική λύση**, την $(x, y) = \left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right) = \left(-\dfrac{1}{\lambda}, -\lambda\right)$

Αν $D = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\lambda = 2$, το σύστημα θα είναι **αδύνατο** ή **αόριστο**.

Πιο συγκεκριμένα

Αν $\lambda = 0$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 0x - y = -1 \\ 0x - 2y = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} y = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ …**Αδύνατο**.

Αν $\lambda = 2$, τότε το σύστημα γίνεται $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 4x - 2y = 2 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ …**Αόριστο**.

Επειδή $2x - y = 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$, η απειρία λύσεων, είναι η $(\kappa, 2\kappa - 1)$, $\kappa \in R$

Θέμα **2**

Αν το σύστημα **(Σ)** : $\begin{cases} \lambda x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = \lambda - 1 \end{cases}$ είναι **αδύνατο**, θα δείξουμε ότι $\lambda = 1$

Απάντηση

Για να είναι αδύνατο πρέπει $D = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4\lambda - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 1$

Με μία δοκιμή έχουμε **(Σ)** : $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ **Αδύνατο**.

Οπότε $\lambda = 1$

Θέμα 3

Αφού λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\lambda x-y=0\\ x+\lambda y=\lambda+2\end{cases}$, $\lambda\in R$

θα εξετάσουμε αν **υπάρχει λ**, ώστε το (x,y) να είναι **λύση** του, με $x+y=1$

Απάντηση

Είναι $D=\begin{vmatrix}\lambda & -1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1\neq 0$ και προφανώς $D_x=\begin{vmatrix}0 & -1\\ \lambda+2 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda+2$

$D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+2\lambda$

Αφού $D\neq 0$, για κάθε $\lambda\in R$

το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** την $(x,y)=\left(\dfrac{\lambda+2}{\lambda^2+1},\dfrac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda^2+1}\right)$

Θέλουμε $x+y=1$

ή $\dfrac{\lambda+2}{\lambda^2+1}+\dfrac{\lambda^2+2\lambda}{\lambda^2+1}=1 \Leftrightarrow \dfrac{\lambda^2+3\lambda+2}{\lambda^2+1}=1 \Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda+2=\lambda^2+1 \Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{1}{3}$

Θέμα 4

Αφού λύσουμε το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\lambda x+y=0\\ x+\lambda^2 y=0\end{cases}$, $\lambda\in R$

θα εξετάσουμε αν **υπάρχει λ**, ώστε το (x,y) να είναι **λύση** του, με $2x-y=1$

Απάντηση

Είναι $D=\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda^2\end{vmatrix}=\lambda^3-1$ και προφανώς $D_x=\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & \lambda^2\end{vmatrix}=0$, $D_y=\begin{vmatrix}\lambda & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$

Αν $D\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$

το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** την προφανή, τη μηδενική, την $(x,y)=(0,0)$

Τότε είναι $2x-y=0\neq 1$

Αν $D=0 \Leftrightarrow \lambda=1$, το σύστημα θα είναι **αόριστο**

και με αντικατάσταση στο αρχικό σύστημα, προκύπτει $(\Sigma):\begin{cases}x+y=0\\ x+y=0\end{cases}$

το οποίο είναι ισοδύναμο με το $(\Sigma): x+y=0 \Leftrightarrow y=-x$

Έτσι, η **απειρία λύσεων** είναι η $(x,y)=(r,-r)$ … $r\in R$

Τώρα θέλουμε $2x-y=1 \Leftrightarrow 2r-(-r)=1 \Leftrightarrow 3r=1 \Leftrightarrow r=\dfrac{1}{3}$

Οπότε $\lambda=1$

Ας δούμε και τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 5

Έστω ένα **2x2** γραμμικό σύστημα εξισώσεων **(Σ)**, με αγνώστους **x** και **y**

Αν $\mathbf{3D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2DD_x + 2DD_y + 2D - 1}$

θα αποδείξουμε ότι το σύστημα **(Σ)**, δέχεται **μοναδική λύση**, την $\mathbf{(x, y) = (1{,}1)}$

Απάντηση

Από $\mathbf{3D^2 + D_x^2 + D_y^2 = 2DD_x + 2DD_y + 2D - 1}$

είναι $D^2 + D^2 + D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2DD_x - 2DD_y - 2D + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{(D - D_x)^2 + (D - D_y)^2 + (D - 1)^2 = 0}$

Οπότε, πρέπει $\mathbf{D = D_x}$ και $\mathbf{D = D_y}$ και $\mathbf{D = 1 \neq 0}$

Οπότε, το **(Σ)** δέχεται μοναδική λύση, το ζευγάρι $\mathbf{(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1{,}1)}$

Θέμα 6

Έστω ένα **2x2** γραμμικό σύστημα εξισώσεων, με αγνώστους **x** και **y**

Ξέρουμε ότι: $\mathbf{D + D_x + D_y = 3}$, $\mathbf{D - 2D_x + D_y = 0}$ και $\mathbf{D + D_x - D_y = 1}$

θα αποδείξουμε ότι το σύστημα **(Σ)** δέχεται **μοναδική λύση** την $\mathbf{(x, y) = (1{,}1)}$

Απάντηση

Λύνοντας το σύστημα: $\mathbf{D + D_x + D_y = 3}$, $\mathbf{D - 2D_x + D_y = 0}$ και $\mathbf{D + D_x - D_y = 1}$

προκύπτει πολύ απλά ότι $\mathbf{D = D_x = D_y = 1}$

Οπότε, το **(Σ)** δέχεται μοναδική λύση το ζευγάρι $\mathbf{(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = (1{,}1)}$

Θέμα 7

Έστω το **2x2** **ομογενές** γραμμικό σύστημα **(Σ)** : $\mathbf{\begin{cases} \alpha x + y = 0 \\ x + \beta y = 0 \end{cases}}$, ώστε $\mathbf{\alpha\beta > 1}$

Θα αποδείξουμε ότι αυτό δέχεται μοναδική λύση την προφανή, την $\mathbf{(x, y) = (0{,}0)}$

Απάντηση

Επειδή $D = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta - 1 \neq 0$ και $D_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{vmatrix} = 0$ και $D_y = \begin{vmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

το σύστημα θα δέχεται **μοναδική λύση** την **μηδενική**, την $\mathbf{(x, y) = (0{,}0)}$

Θέμα 8

Θα βρούμε τις **τιμές** της παραμέτρου α, ώστε το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} x+2y=\alpha \\ 2x+4y=3 \end{cases}$

να είναι **αόριστο**.

Απάντηση

Είναι $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4=0$

Οπότε, είναι βέβαιο ότι το σύστημα θα είναι ή **αδύνατο** ή **αόριστο**.

Επειδή $(\Sigma): \begin{cases} x+2y=\alpha \\ x+2y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$, για να είναι **αόριστο**, πρέπει $\alpha=\dfrac{3}{2}$

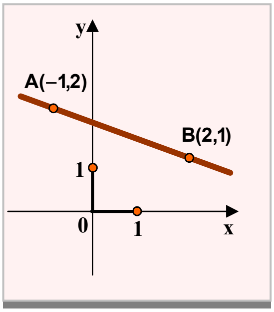
Αν τώρα είναι $\alpha \neq \dfrac{3}{2}$, το σύστημα είναι **αδύνατο**.

Θέμα 9

Θα βρούμε την ευθεία (ε), που **διέρχεται** από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(2,1)$

Απάντηση

Η εξίσωση της ευθείας θα έχει τη μορφή $y=\alpha x+\beta$



Αφού η ευθεία διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$

το ζεύγος $(-1,2)$ είναι η λύση της εξίσωσης $y=\alpha x+\beta$

Άρα $2=\alpha\cdot(-1)+\beta$ ή $\alpha-\beta=-2$ (1)

Ομοίως και για το σημείο $B(2,1)$

έχουμε $1=\alpha\cdot 2+\beta$ ή $2\alpha+\beta=1$ (2)

Οι (1) και (2) αποτελούν ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους τους α,β

και είναι το $(\Sigma): \begin{cases} \alpha-\beta=-2 \\ 2\alpha+\beta=1 \end{cases}$

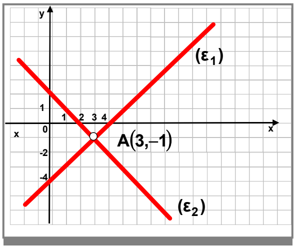
Από τη λύση του συστήματος αυτού, βρίσκουμε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{3}$ και $\beta=\dfrac{5}{3}$

και επομένως η ζητούμενη ευθεία **είναι** η $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{5}{3}$ ή τελικά $(\varepsilon): x+3y=5$

Θέμα 10

Θα λύσουμε **γραφικά** το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}$

Απάντηση



Το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}x-y=4\\x+y=2\end{cases}$ γίνεται $(\Sigma):\begin{cases}y=x-4\\y=-x+2\end{cases}$

και αντιπροσωπεύει δύο ευθείες

την $(\varepsilon_1): y=x-4$ και την $(\varepsilon_2): y=-x+2$

Για την (ε_1) για $x=0$, έχουμε $y=-4$ και για $y=0$, έχουμε $x=4$

Επομένως η (ε_1) τέμνει τον $x'x$ στο 4 και τον $y'y$ στο -4

Για την (ε_2) για $x=0$, έχουμε $y=2$ και για $y=0$, έχουμε $x=2$

Επομένως η (ε_2) τέμνει τον $x'x$ στο 2 και τον $y'y$ στο 2

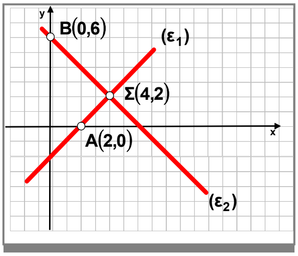
Σχεδιάζουμε τώρα τις ευθείες και παρατηρούμε ότι τέμνονται στο σημείο $A(3,-1)$

Άρα, η **λύση** του συστήματος είναι το ζεύγος $(3,-1)$

Θέμα 11

Θα βρούμε το **σύστημα (Σ)** που **παριστάνει** το **σύστημα** των πιο κάτω **ευθειών**.

Απάντηση



Έστω ότι $(\varepsilon_1): y=\alpha x+\beta$

Επειδή $A\in(\varepsilon_1)$ είναι $0=2\alpha+\beta$

και $\Sigma\in(\varepsilon_1)$ είναι $2=4\alpha+\beta$

Πολύ απλά, προκύπτει $\alpha=1$, $\beta=-2$ και συνεπώς $(\varepsilon_1): y=x-2$

Έστω ότι $(\varepsilon_2): y=\alpha x+\beta$

Επειδή $B\in(\varepsilon_2)$ είναι $6=\beta$ και $\Sigma\in(\varepsilon_2)$ είναι $2=4\alpha+\beta$

Πολύ απλά, προκύπτει $\alpha=-1$, $\beta=6$ και συνεπώς $(\varepsilon_2): y=-x+6$

Οπότε, πρόκειται για το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}x-y=2\\x+y=6\end{cases}$

Θέμα **12**

Θα **λύσουμε** το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

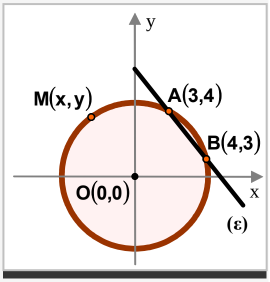
Μετά, θα δώσουμε τη **γεωμετρική διάσταση** του θέματος.

Απάντηση

Είναι $(\Sigma):\begin{cases} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7-x \\ x^2-7x+12=0 \end{cases}$

Πολύ απλά, βρίσκουμε ότι $x=3$ και $y=4$ ή $x=4$ και $y=3$

Δηλαδή, το σύστημα έχει λύσεις τις $(3,4)$ και $(4,3)$



Να αναφέρουμε ότι τα σημεία $M(x,y)$

ώστε $x^2+y^2=25$, είναι σημεία κύκλου.

Πραγματικά

Επειδή $OM=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25}=5$

διαπιστώνουμε ότι η απόσταση κάθε σημείου από το O είναι σταθερή και ίση με 5

Οπότε, τα σημεία M είναι σημεία του κύκλου κέντρου O και ακτίνας $\rho=5$

Από την επίλυση του (Σ) βρήκαμε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=-x+7$

τέμνει τον κύκλο $(\kappa): x^2+y^2=5^2$, στα σημεία $A(3,4)$ και $B(4,3)$

Να τονίσουμε ότι είναι πάντα ωφέλιμο να κάνουμε δοκιμή, ώστε να διαπιστώνουμε την ορθότητα της λύσης.

Πραγματικά

Αντικαθιστώντας τις τιμές που βρήκαμε, οι εξισώσεις του (Σ) ικανοποιούνται.

Για $x=3$ και $y=4$, είναι $(\Sigma):\begin{cases} 3+4=7 \\ 3^2+4^2=25 \end{cases}$

Για $x=4$ και $y=3$, είναι $(\Sigma):\begin{cases} 4+3=7 \\ 4^2+3^2=25 \end{cases}$

Ασκήσεις

δ.40● Έστω το $2x2$ γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} ax+by=a+b \\ cx+dy=c+d \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι $ad-cb=2012$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα (Σ) δέχεται **μοναδική λύση** την $(x,y)=(1,1)$

δ.41● Έστω το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} 2\alpha x+y=2\alpha-2\beta \\ 2x+y=\beta-\gamma \end{cases}$, $\alpha,\beta,\gamma\in R$

Είναι $D^2+D_x^2+D_y^2=2D-1$

α) Να λύσετε το σύστημα (Σ)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=\gamma=1{,}5$

δ.42● Έστω το $2x2$ γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

Γνωρίζουμε ότι τα **ζεύγη** $(1,2)$ και $(2,1)$ είναι **λύσεις** του.

α) Να δείξετε ότι $a_1b_2=a_2b_1$

β) Να δείξετε ότι το (Σ) δέχεται **απειρία λύσεων**, την $(x,y)=(2-\rho,1+\rho)$, $\rho\in R$

δ.43● Έστω το $2x2$ γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

ώστε $a_1+2b_1=c_1$, $a_2+2b_2=c_2$ και $2a_1+b_1=c_1$, $2a_2+b_2=c_2$

α) Να αποδείξετε ότι το (Σ) δέχεται **απειρία λύσεων**.

β) Να αποδείξετε ότι το ζεύγος $(x,y)=(-1,4)$ είναι **μία λύση** του συστήματος.

δ.44● Έστω το $2x2$ γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$

ώστε $a_1+b_1=c_1$ και $a_2+b_2=c_2$ και $c_1b_2>c_2b_1$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση**, την $(x,y)=(1,1)$

δ.45● Έστω το $2x2$ γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} (\lambda+1)x+\lambda^2y=0 \\ x+(\lambda+1)y=\lambda \end{cases}$, $\lambda>0$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** (x_o,y_o)

β) Αν είναι και $x_o-y_o=-1$, να αποδείξετε ότι $\lambda=1$ και $(x_o,y_o)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

δ.46● Έστω το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases} \alpha x+\beta y=\alpha^2+\beta^2 \\ \beta x+\alpha y=2\alpha\beta \end{cases}$, $0<\alpha<\beta$

Να αποδείξετε ότι το σύστημα δέχεται **μοναδική λύση** (x_o,y_o) την (α,β)

δ.47● Έστω το **3x2** γραμμικό σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}2x+y=3\\2x-y=1\\x+\lambda y=2\end{cases}$, $\lambda\in R$

Γνωρίζουμε ότι αυτό δέχεται **μοναδική λύση** (x_o,y_o)

Να αποδείξετε ότι αυτή είναι η $(x_o,y_o)=(1,1)$ και επίσης αποδείξτε ότι $\lambda=1$

δ.48● Να εξετάσετε αν το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\beta x+y=\alpha+\beta\\2\alpha x+(\beta+1)y=3\beta+\alpha\end{cases}$, $\alpha,\beta\in R$

μπορεί να δεχτεί σαν μία **λύση μόνο** το ζευγάρι $(1,1)$

δ.49● Έστω το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\alpha x+\beta y=\alpha+\beta\\(\beta+1)x-\alpha y=\beta-\alpha+1\end{cases}$, $\alpha,\beta\in R$, $\beta>0$

α) Να αποδείξετε ότι αυτό δέχεται **λύση** το ζευγάρι $(1,1)$

β) Να εξετάσετε αν αυτή είναι **μοναδική**.

γ) Να αποδείξετε ότι **δεν υπάρχουν** αριθμοί $\alpha,\beta>0$, ώστε $\alpha\sqrt{2}+\beta\sqrt{3}=\alpha+\beta$

και $\alpha\sqrt{3}-\sqrt{2}-\beta\sqrt{2}=\alpha-\beta-1$

δ.50● Έστω το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\beta x+\gamma y=\alpha+\beta+\delta\\2\alpha x+(\beta+1)y=3\beta+\gamma\end{cases}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in R$

Γνωρίζουμε, ότι αυτό δέχεται **λύση** την $(1,1)$ και την $(-1,3)$

α) Να αποδείξετε ότι $\beta^2+\beta=2\alpha\gamma$

β) Να αποδείξετε ότι και το ζεύγος $(3,-1)$ είναι **λύση** του (Σ)

δ.51● Έστω τα συστήματα $(\Sigma_1):\begin{cases}x+3y=4\\5x-y=4\end{cases}$, $(\Sigma_2):\begin{cases}\alpha x+\beta^3y=2\\\alpha^3x+\beta y=\alpha+\beta\end{cases}$, $\alpha,\beta\in Q$

Αν αυτά είναι **ισοδύναμα**, να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$

δ.52● Έστω το σύστημα $(\Sigma):\begin{cases}\alpha x+y=\alpha-\beta\\x+y=\beta-\gamma\end{cases}$, α,β,γ **άρρητοι** αριθμοί.

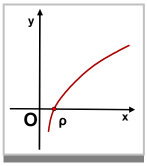
Να αποδείξετε ότι $D^2+D_x^2+D_y^2\neq 2D-1$

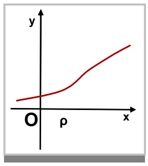
δ.53● Να βρείτε την **παραβολή** $f(x)=ax^2+bx+c$, $a,b,c\in R$

αν αυτή **διέρχεται** από τα σημεία $A(1,0)$, $B(0,2)$ και $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{4}\right)$

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ε Θεωρητικά θέματα





Στην περίπτωση που μία συνάρτηση
είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα
δεν μπορεί να δεχτεί δύο διαφορετικές ρίζες.

Δηλαδή, ή δεν θα δέχεται καμία ρίζα, ή θα δέχεται σαν ρίζα μοναδικό αριθμό.

Παράδειγμα **1**

Έστω η **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(0)=1}$

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{f(x^3-1)=1}$

Πραγματικά

$$\mathbf{f(x^3-1)=1} \Leftrightarrow f(x^3-1)=f(0) \Leftrightarrow x^3-1=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$$

Δηλαδή, η εξίσωση $\mathbf{f(x^3-1)=1}$ έχει **μοναδική ρίζα** τον αριθμό $\mathbf{x=1}$

Συνηθίζεται να λέμε και ότι η f δέχεται το πολύ μία ρίζα.
Η πιο πάνω έκφραση είναι **λάθος**, γιατί μπορεί να μην έχουμε απλή ρίζα.
Για παράδειγμα, η $\mathbf{f(x)=x^3}$, ενώ είναι γνήσια αύξουσα έχει **τρεις ρίζες ίσες** με **0**

Για το πλήθος λύσεων των εξισώσεων, που δεν επιλύονται αλγεβρικά
με τις γνωστές μεθόδους παραγοντοποίησης, τα φέρνουμε όλα σε ένα μέλος
θεωρούμε συνάρτηση και κινούμαστε με τη βοήθεια της μονοτονίας.

Παράδειγμα **2**

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\mathbf{x^5+x=2}$ έχει **μοναδική λύση** την $\mathbf{x=1}$

Πραγματικά

Θεωρούμε την $\mathbf{f(x)=x^5+x-2}$ και θα αποδείξουμε ότι αυτή έχει μοναδική ρίζα.

Έστω $\mathbf{x_1,x_2\in R}$ με $\mathbf{x_1<x_2}$, τότε είναι και $\mathbf{{x_1}^5<{x_2}^5}$

Οπότε $\mathbf{{x_1}^5+x_1<{x_2}^5+x_2}$ ή ${x_1}^5+x_1-2<{x_2}^5+x_2-2$ …δηλαδή $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$

Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα, από $\mathbf{f(x)=0} \Leftrightarrow \mathbf{f(x)=f(1)} \Leftrightarrow \mathbf{x=1}$

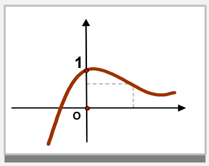
Ας προσέξουμε και το πιο κάτω σχόλιο.

Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}$ παρουσιάζει μέγιστο το $\mathbf{1}$, μόνο στο $\mathbf{0}$

σημαίνει ότι $\mathbf{f(x)\le f(0)=1}$ …για κάθε $\mathbf{x\in\Delta}$

Μόνο που ειδικότερα σημαίνει ότι $\mathbf{f(x)=1} \Leftrightarrow \mathbf{x=0}$

και $\mathbf{f(x)<1} \Leftrightarrow \mathbf{x\neq 0}$



Παράδειγμα **3**

Η ορισμένη στο $\mathbf{R}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$ παρουσιάζει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$, **μόνο** στη θέση $\mathbf{0}$

Θα **λύσουμε** και την εξίσωση $\mathbf{f(e^x-1)=1}$

Πραγματικά

Από $\mathbf{f(e^x-1)=1} \Leftrightarrow f(e^x-1)=f(0) \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow \mathbf{x=0}$

Ας προσέξουμε το πιο κάτω θέμα.

Θέμα 1

Έστω η ορισμένη και **άρτια** στο $D=[-1,1]$ συνάρτηση f

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(-x)$ είναι **περιττή** στο D

Απάντηση

Επειδή η f είναι άρτια, είναι $f(-x)=f(x)$, για κάθε $x\in D=[-1,1]$

Τώρα, αν $x\in D$, τότε και $-x\in D$

αφού αν $-1\le x\le 1$, είναι και $1\ge -x\ge 1 \Leftrightarrow -1\le -x\le 1$

Είναι $g(-x)=-xf(x)=-xf(-x)=-g(x)$, για κάθε $x\in D=[-1,1]$

Συνεπώς, η συνάρτηση g είναι **περιττή** στο D

Θέμα 2

Έστω η **γνήσια μονότονη** στο R συνάρτηση f, με το ίδιο **είδος μονοτονίας**.

Γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1,2)$, $B(2,3)$

Θα αποδείξουμε ότι η f είναι **γνήσια αύξουσα**.

Μετά θα **λύσουμε** την ανίσωση $f(f(x)-2)<2$

Απάντηση

Επειδή $A(1,2)\in C_f$, είναι $f(1)=2$ και επειδή $B(2,3)\in C_f$, είναι $f(2)=3$

Αφού η f είναι **γνήσια μονότονη** με το ίδιο **είδος μονοτονίας**

ή θα είναι γνήσια αύξουσα ή θα είναι γνήσια φθίνουσα.

Αν ήταν γνήσια φθίνουσα, από $1<2$, θα ήταν και $f(1)>f(2) \Leftrightarrow 2>3$, Άτοπο.

Άρα είναι **γνήσια αύξουσα**.

Έτσι $f(f(x)-2)<2 \Leftrightarrow f(f(x)-2)<f(1) \Leftrightarrow f(x)-2<1 \Leftrightarrow f(x)<3 \Leftrightarrow f(x)<f(2)$

$\Leftrightarrow x<2$

Θέμα 3

Έστω η ορισμένη **γνήσια φθίνουσα** στο $R_+=[0,+\infty)$ συνάρτηση f, με $f(0)=1$

Θα αποδείξουμε ότι η $F(x)=f^3(x)+f(x)-1$ στο σημείο 0 έχει **μέγιστο** το 1

Απάντηση

Αφού η f είναι **γνήσια φθίνουσα** στο R_+, από $x\ge 0$ είναι $f(x)\le f(0)=1$

όπως επίσης και $f^3(x)\le 1$

Είναι και $f^3(x)+f(x)\le 2 \Leftrightarrow f^3(x)+f(x)-1\le 1 \Leftrightarrow F(x)\le 1 \Leftrightarrow F(x)\le F(0)$

Διαπιστώνουμε λοιπόν, ότι η F στο 0 παρουσιάζει **μέγιστο** το -1

Θέμα **4**

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = 1 + \sqrt{x}}$, με $\mathbf{x \in R_+}$

α) Θα διαπιστώσουμε ότι έχει **ελάχιστο**, αλλά **δεν έχει μέγιστο**.

Έστω η ορισμένη και **γνήσια φθίνουσα** στο $\mathbf{R_+}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$, με $\mathbf{f(0) = 1}$

β_1) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ στο σημείο $\mathbf{0}$ έχει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$

β_2) Θα **λύσουμε** και την εξίσωση $\mathbf{g(x) = f(x)}$

γ) Έστω και η ορισμένη στο $\mathbf{R_+}$ συνάρτηση $\mathbf{h}$, ώστε $\mathbf{h(x) = 1 - \left(f(x) - \sqrt{x}\right)^2}$, $\mathbf{x \in R_+}$

Αν $\mathbf{f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}}$, θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{h}$ παρουσιάζει **μέγιστο** και θα το **βρούμε**.

Απάντηση

α) Από $\mathbf{g(x) = y}$, ισοδύναμα είναι $1 + \sqrt{x} = y \iff \sqrt{x} = y - 1 \iff x = (y-1)^2 \ \ldots \mathbf{y \geq 1}$

Πρέπει $x \geq 0 \iff (y-1)^2 \geq 0$, Προφανές

Οπότε, είναι $\mathbf{g(R_+) = [1, +\infty)}$

Είναι προφανές, ότι έχει **ελάχιστο** το $\mathbf{1}$, αλλά **δεν έχει μέγιστο.**

Να παρατηρήσουμε ότι, τα ακρότατα της **g** θα μπορούσαμε να τα διαπιστώσουμε και με τη γραφική παράσταση της **g** και με τη μονοτονία και με φράγματα.

β_1) Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια φθίνουσα** στο $\mathbf{R_+}$, από $\mathbf{x \geq 0}$ είναι $\mathbf{f(x) \leq f(0) = 1}$

Να τονίσουμε ότι το **"="** ισχύει ταυτόχρονα.

Οπότε, στο σημείο $\mathbf{0}$ η συνάρτηση $\mathbf{f}$ έχει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$

β_2) Έστω η εξίσωση $\mathbf{g(x) = f(x)}$

Επειδή $g(x) \geq 1$ και $f(x) \leq 1$

Πρέπει να είναι $\mathbf{g(x) = 1}$ και $\mathbf{f(x) = 1}$ $\iff$ $1 + \sqrt{x} = 1$ και $f(x) = 1$ $\iff$ $\sqrt{x} = 0 \iff \mathbf{x = 0}$ και $f(0) = 1$ Προφανές …Άρα $\mathbf{x = 0}$

γ) Είναι $-\left(f(x) - \sqrt{x}\right)^2 \leq 0$ και $1 - \left(f(x) - \sqrt{x}\right)^2 \leq 1$ ή $\mathbf{h(x) \leq 1}$, $\mathbf{x \in R}$

Επειδή $h\left(\frac{1}{4}\right) = 1 - \left(f\left(\frac{1}{4}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = 1$, είναι $\mathbf{h(x) \leq h\left(\frac{1}{4}\right) = 1}$

Οπότε, η συνάρτηση $\mathbf{h}$ παρουσιάζει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$

Ασκήσεις

ε.**1**● Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbf{A} = [0,+\infty)$ να αποδείξετε ότι αυτή έχει **ελάχιστο**.

ε.**2**● Αν η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια μονότονη** με το ίδιο **είδος μονοτονίας** και $\mathbf{f(0) < f(-1)}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια φθίνουσα**.

ε.**3**● Αν η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια φθίνουσα** στο $\mathbf{R}$, να **λύσετε** την ανίσωση $\mathbf{f(x^2 + x) < f(2)}$

ε.**4**● Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = x^7 + x}$ είναι **γνησίως αύξουσα**.

Μετά να **λύσετε** την εξίσωση $\mathbf{(x+1)^7 + x = 129}$

ε.**5**● Έστω ότι η $\mathbf{f}$ έχει **ελάχιστο** στο $\mathbf{1}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{h(x) = -f(x)}$ έχει στο $\mathbf{1}$ **μέγιστο**.

ε.**6**● Έστω η ορισμένη και **περιττή** στο $\mathbf{\Delta = [-10,10]}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Αυτή είναι **γνήσια φθίνουσα** στο $\mathbf{[0,5]}$ και **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbf{[5,10]}$

Να δείξετε ότι $\mathbf{f(x) \geq f(5)}$ για κάθε $\mathbf{x \in [0,10]}$, $\mathbf{f(x) \leq f(-5)}$ για κάθε $\mathbf{x \in [-10,0]}$

ε.**7**● Η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη $\mathbf{R}$, ώστε $\mathbf{f(1) = 1}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = f^2(x) - 2f(x) + 2}$, παρουσιάζει **ελάχιστο**.

ε.**8**● Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \dfrac{\kappa x}{x^2+1}}$, ορισμένη στο $\mathbf{R}$, $\mathbf{\kappa > 0}$

α) Να αποδείξετε ότι $\mathbf{-\kappa \leq 2f(x) \leq \kappa}$, για κάθε $\mathbf{x \in R}$

β) Αν η $\mathbf{f}$ έχει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$, να αποδείξετε ότι έχει **ελάχιστο** το $\mathbf{-1}$

ε.**9**● Αν η $\mathbf{f}$ έχει **ελάχιστο** το $\mathbf{0}$, δείξτε ότι η $\mathbf{g(x) = 1 - f(x)}$ έχει **μέγιστο** το $\mathbf{1}$

ε.**10**● Αν η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη, **γνησίως αύξουσα** και **περιττή** στο $\mathbf{R}$ να **λύσετε** την ανίσωση $\mathbf{f(x) + f(-2) < 0}$

ε.**11**● Αν η $\mathbf{f}$ είναι ορισμένη στο $\mathbf{R}$, αποδείξτε ότι η $\mathbf{h(x) = f(x) + f(-x)}$ είναι **άρτια**.

ε.**12**● Έστω η ορισμένη και **περιττή** στο $\mathbf{D = [-1,1]}$ συνάρτηση $\mathbf{f}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = xf(x^3)}$ είναι **άρτια** στο $\mathbf{D}$

ε.13● Έστω η συνάρτηση $g(x)=1+x^2$, $x\in R_+$

α) Να αποδείξετε ότι αυτή έχει **ελάχιστο**, αλλά **δεν έχει μέγιστο**.

β) Έστω η ορισμένη και **γνήσια φθίνουσα** στο R_+ συνάρτηση f , με $f(0)=1$

$β_1$) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f στο σημείο 0 έχει **μέγιστο** το 1

$β_2$) Μετά να **λύσετε** την εξίσωση $g(x)=f(x)$

ε.14● Έστω η συνάρτηση $h(x)=1-φ^2(x)-2xφ(x)-x^2$, ορισμένη στο $[0,+\infty)$

Να αποδείξετε ότι η h παρουσιάζει **μέγιστο**

στην περίπτωση που ▪ $φ(1)=-1$ ή ▪▪ η $C_φ$ **τέμνει** την $(ε): y=-x$

ε.15● Έστω οι ορισμένες στο R συναρτήσεις f,g , ώστε $f^2(x)+g^2(x)=1, x\in R$

και γνωρίζουμε ότι οι **γραφικές παραστάσεις** τους **τέμνονται** στην ευθεία $x=1$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=2f(x)g(x)$ παρουσιάζει **μέγιστο**.

ε.16● Έστω οι ορισμένες στο R συναρτήσεις f , g , ώστε $f(x)=g(x)(g(x)-1)$, $x\in R$

Αν η ευθεία $(ε): y=0{,}5$ τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα τουλάχιστον σημείο, να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει **ελάχιστο**, το οποίο και να **βρείτε**.

ε.17● Έστω η ορισμένη και **άρτια** στο R συνάρτηση f

Αν είναι **γνήσια φθίνουσα** στο $(-\infty,0]$, να αποδείξετε ότι είναι **γνήσια αύξουσα** στο $[0,+\infty)$

ε.18● Αν η ορισμένη στο R συνάρτηση f παρουσιάζει **μέγιστο μόνο** στο 0 το 1 και για τους αριθμούς A και B είναι $2f(B)=3-f(A)$, να αποδείξετε ότι $A=B$

ε.19● Έστω οι συναρτήσεις f και g , ώστε $f(x)+1=g(x)-x^2$, για κάθε $x\in R$

Να βρείτε την **ελάχιστη κατακόρυφη απόσταση** των C_f και C_g

ε.20● Έστω η **ορισμένη** και **γνήσια αύξουσα** στο R_+ συνάρτηση f

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+f(2x)=f(3x)+f(4x)$ έχει **μοναδική ρίζα** το 0

ε.21● Να αποδείξετε ότι το **γινόμενο** μία **άρτιας** με μίας **περιττής** στο R συνάρτησης δίνει **περιττή** συνάρτηση.

ε.22● Έστω τα σημεία $A(x,1-x)$ και $B(x+1,x)$, $x\in R$

Να αποδείξετε ότι το AB έχει το **μικρότερο μήκος**, όταν αυτό γίνει **ίσο** με 1

ε.23● Έστω η ορισμένη στο R συνάρτηση f , ώστε $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $x,y\in R$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$

β) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι **περιττή**.

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

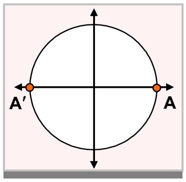
α Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Ας δούμε τις πιο κάτω βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Βασικός στόχος μας
σε μια απλή τριγωνομετρική εξίσωση της μορφής $\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x, \varepsilon\varphi x, \sigma\varphi x = \alpha$
είναι η μετατροπή του αριθμού α, σε αντίστοιχο τριγωνομετρικό αριθμό αν αυτό είναι δυνατό.

Παράδειγμα 1

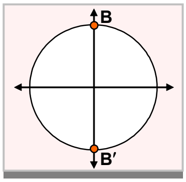
$$\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \pi,\ \kappa \in Z$$



Πρόκειται για τόξα που καταλήγουν τελικά στο A ή στο A'
Δηλαδή, για τόξα της μορφής $x = \lambda\pi$, με $\lambda \in Z$

Παράδειγμα 2

$$\sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2},\ \kappa \in Z$$



πρόκειται για τόξα που καταλήγουν τελικά στο B ή στο B'
Δηλαδή για τόξα της μορφής $x = \lambda\pi + \frac{\pi}{2}$, $\lambda \in Z$

Ας δούμε και μία λίγο πιο σύνθετη μορφή.

Παράδειγμα 3

Θα λύσουμε την εξίσωση $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

Είναι $\eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi - \frac{5\pi}{6}$$

$$\text{ή } x + \frac{\pi}{3} = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{2} \qquad x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \text{ ή } x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6},\ \kappa \in Z$$

Ας δούμε πως κινούμαστε

όταν εμφανίζεται «-» μπροστά από έναν τριγωνομετρικό αριθμό.

Παράδειγμα 4

$$\eta\mu x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

με $\kappa \in Z$

Παράδειγμα 5

$$\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{2\kappa\pi}{3}$$

$\kappa \in Z$

Παράδειγμα 6

$$\varepsilon\varphi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = -\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$$

$\kappa \in Z$

Παράδειγμα 7

$$\sigma\varphi x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\varphi x = -\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \sigma\varphi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}$$

$\kappa \in Z$

Ας δούμε την περίπτωση εξίσωσης της μορφής ημx = συνy

Παράδειγμα 8

Θα λύσουμε την εξίσωση **συν(3x) = ημx**

Ισοδύναμα είναι $\sigma\upsilon\nu(3x) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x \\ 3x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \\ x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}, \ \kappa \in Z$$

Ας δούμε πως κινούμαστε, όταν οι γωνίες εκφράζονται σε μοίρες.

Παράδειγμα **9**

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{2συν(3ω-45^o)=1}$

Πραγματικά

$$\mathbf{2συν(3ω-45^o)=1} \Leftrightarrow συν(3ω-45^o)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbf{συν(3ω-45^o)=συν(60^o)}$$

Οπότε

$$\mathbf{3ω-45^o = 2κ\cdot 180+60^o} \Leftrightarrow 3ω=2κ\cdot180+105^o \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{ω=120\cdot κ+35^o}}$$

ή

$$\mathbf{3ω-45^o = 2κ\cdot 180-60^o} \qquad 3ω=2κ\cdot180-15^o \qquad \boxed{\mathbf{ω=120\cdot κ-5^o}},\ \ \mathbf{κ\in Z}$$

Εδώ, θα μπορούσαμε να μετατρέψουμε πρώτα τις μοίρες σε ακτίνια.

Πιο συγκεκριμένα.

Η εξίσωση $\mathbf{2συν(3ω-45^o)=1}$

ισοδύναμα γίνεται $\mathbf{συν\left(3ω-\frac{π}{4}\right)=\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \mathbf{συν\left(3ω-\frac{π}{4}\right)=συν\left(\frac{π}{3}\right)}$

$$\Leftrightarrow \mathbf{3ω-\frac{π}{4}=2κπ+\frac{π}{3}} \Leftrightarrow 3ω=2κπ+\frac{7π}{12} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{ω=2κ\frac{π}{3}+\frac{7π}{36}}}$$

ή

$$\mathbf{3ω-\frac{π}{4}=2κπ-\frac{π}{3}} \qquad 3ω=2κπ-\frac{π}{12} \qquad \boxed{\mathbf{ω=2κ\frac{π}{3}-\frac{π}{36}}},\ \ \mathbf{κ\in Z}$$

Ας δούμε και το παράδειγμα.

Παράδειγμα **10**

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{συν(2x)=συν(2x+π)}$

Πραγματικά

Είναι $\mathbf{συν(2x)=συν(2x+π)} \Leftrightarrow 2x=2κπ+2x+π \Leftrightarrow \mathbf{0=2κπ+π}$

$$0=2κπ+π \Leftrightarrow 0=2κ+1 \Leftrightarrow \mathbf{κ=-\frac{1}{2}}$$

Αδύνατη, αφού ο κ είναι ακέραιος

$$\textbf{ή}\ \mathbf{2x=2κπ+π-2x} \Leftrightarrow \mathbf{4x=2κπ+π}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x=\frac{κπ}{2}+\frac{π}{4}}},\ \ \mathbf{κ\in Z}$$

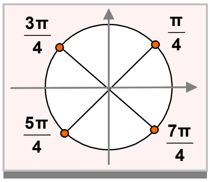
Να τονίσουμε όμως τώρα, κάτι πολύ σημαντικό.

Στην περίπτωση των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων, να προσέχουμε τους περιορισμούς.

Παράδειγμα **11**

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=1}$

Πραγματικά



Είναι $\boldsymbol{\varepsilon\varphi\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{2x-\frac{\pi}{4}=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}} \Leftrightarrow 2x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{x=\kappa\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}}},\ \mathbf{\kappa\in Z}$$

Είναι προφανές, ότι για τις διάφορες τιμές της ακέραιος παραμέτρου κ τα τόξα καταλήγουν στο $\frac{\pi}{4}$ ή στο $\frac{3\pi}{4}$ ή στο $\frac{5\pi}{4}$ ή στο $\frac{7\pi}{4}$

Πρέπει $\boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0}}$ Προφανές.

αφού αν ο **κ** είναι άρτιος, δηλαδή $\mathbf{\kappa=2\rho}$

είναι $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\rho\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0}$

και αν ο **κ** είναι περιττός, δηλαδή $\mathbf{\kappa=2\rho+1}$

είναι $\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(2\rho\pi+\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\neq 0}$

Να τονίσουμε ότι η τεκμηρίωση μπορεί να γίνει και όπως παρακάτω.

Πρέπει $\boxed{\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0}}$

Δηλαδή, πρέπει $\mathbf{2x-\frac{\pi}{4}\neq\rho\pi+\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow 2\left(\kappa\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\neq\rho\pi+\frac{\pi}{2}$

$$\Leftrightarrow \kappa\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\neq\rho\pi+\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \kappa\pi-\frac{\pi}{4}\neq\rho\pi \Leftrightarrow \mathbf{\kappa-\rho\neq\frac{1}{4}}$$

Το οποίο είναι προφανές, αφού η διαφορά ακεραίων είναι διάφορη του $\mathbf{\frac{1}{4}}$

Παράδειγμα 12

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\varepsilon\varphi(2x+\pi)$

Πραγματικά

Ισοδύναμα είναι $x-\frac{\pi}{4}=\kappa\pi+2x+\pi \Leftrightarrow -x=\kappa\pi+\frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow x=-\kappa\pi-\frac{5\pi}{4},\ \kappa\in Z$

Αν θέλουμε, για πρακτικούς λόγους, αντικαθιστούμε το $-\kappa$

με τον ακέραιο λ και έτσι γράφουμε $x=\lambda\pi-\frac{5\pi}{4},\ \lambda\in Z$

Αν όμως κάναμε αλλαγή μελών

έχουμε $\varepsilon\varphi(2x+\pi)=\varepsilon\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow 2x+\pi=\kappa\pi+x-\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\kappa\pi-\frac{5\pi}{4},\ \kappa\in Z$

Διαπιστώνουμε ότι έτσι αποφύγαμε τα πολλά «-»

Ας προσέξουμε τους περιορισμούς.

Προηγούμενα
πριν ακόμη λύσουμε την εξίσωση, έπρεπε να αναφέρουμε τους περιορισμούς.

Δηλαδή έπρεπε να «πούμε»

ότι $\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi-\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\kappa\pi-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$

Προφανές.

και $\sigma\upsilon\nu(2x+\pi)\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(2\kappa\pi-\frac{5\pi}{2}+\pi\right)\neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\neq 0$

Άτοπο.

Να θυμηθούμε ότι το συνημίτονο μηδενίζεται, μόνο όταν τα τόξα καταλήγουν στο $\frac{\pi}{2}$ ή στο $-\frac{\pi}{2}$, ή όπως λέμε στο $\frac{3\pi}{2}$

Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη.

Ας δούμε και το επόμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα 13

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $\textbf{εφxσφ(2x)} = \mathbf{1}$ είναι **αδύνατη**.

Πραγματικά

Πρέπει $\textbf{συνx} \neq \mathbf{0}$ και $\textbf{ημ(2x)} \neq \mathbf{0}$ … αφού $\textbf{εφx} = \dfrac{\textbf{ημx}}{\textbf{συνx}}$ και $\textbf{εφ(2x)} = \dfrac{\textbf{συν(2x)}}{\textbf{ημ(2x)}}$

Επειδή $\textbf{εφxσφ(2x)} = \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$, είναι και $\textbf{σφ(2x)} \neq \mathbf{0}$

η εξίσωση $\textbf{εφxσφ(2x)} = \mathbf{1}$ ισοδύναμα γίνεται $\textbf{εφx} = \dfrac{\mathbf{1}}{\textbf{σφ(2x)}}$

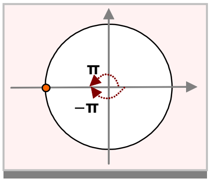
ή $\textbf{εφx} = \textbf{εφ(2x)}$ ή $εφ(2x) = εφx$ ή $2x = κπ + x$ ή $\mathbf{x = κπ}$, $\mathbf{κ \in Z}$

Όμως, τότε είναι $\textbf{ημ(2x)} = \textbf{ημ(2κπ)} = \textbf{ημ(0)} = \mathbf{0}$

και συνεπώς οι λύσεις $\mathbf{x = κπ}$, με $\mathbf{κ \in Z}$, **απορρίπτονται.**

Υπάρχει περίπτωση, να δούμε τη λύση παρουσιασμένη διαφορετικά.

Παράδειγμα 14



Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\textbf{εφ}(\mathbf{4x - π}) = \textbf{εφ}(\mathbf{2x + π})$

Πραγματικά

Είναι $\textbf{εφ}(\mathbf{4x - π}) = \textbf{εφ}(\mathbf{2x + π})$

Ισοδύναμα $\mathbf{4x - π = κπ + 2x + π} \Leftrightarrow 2x = κπ + 2π \Leftrightarrow \mathbf{x = κ\dfrac{π}{2} + π}$, $\mathbf{κ \in Z}$

Οι λύσεις προφανώς, είναι όλες δεκτές.

Ας δούμε τώρα τι γίνεται, αν κάναμε αλλαγή μελών.

Είναι και $\textbf{εφ}(\mathbf{2x + π}) = \textbf{εφ}(\mathbf{4x - π})$

Ισοδύναμα

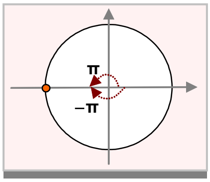
$\mathbf{2x + π = κπ + 4x - π} \Leftrightarrow -2x = κπ - 2π \Leftrightarrow x = -κ\dfrac{π}{2} - π \Leftrightarrow \mathbf{x = λ\dfrac{π}{2} - π}$, $\mathbf{λ \in Z}$

Να τονίσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις βρήκαμε τις ίδια λύσεις !

Ας δούμε και πιο σύνθετες τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Βασικός στόχος, είναι να αναχθούμε στις προηγούμενες βασικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 15



Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{2ημ^2ω + ημω - 1 = 0}$

Πραγματικά

Αν θέσουμε $\mathbf{ημω} = \mathbf{t}$, η εξίσωση $\mathbf{2ημ^2ω + ημω - 1 = 0}$

γίνεται $\mathbf{2t^2 + t - 1 = 0} \Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \mathbf{t = -1}$ ή $\mathbf{t = \frac{1}{2}}$

Επομένως για $\mathbf{t = -1}$

έχουμε $\mathbf{ημω = -1} \Leftrightarrow ημω = ημ\left(-\frac{π}{2}\right) \Leftrightarrow \mathbf{ω = 2κπ - \frac{π}{2}}$, $\mathbf{κ \in Z}$

ή $\mathbf{ω = 2κπ + \frac{3π}{2}}$

για $\mathbf{t = \frac{1}{2}}$

έχουμε $\mathbf{ημω = \frac{1}{2}} \Leftrightarrow ημω = ημ\left(\frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow \mathbf{ω = 2κπ + \frac{π}{6}}$, $\mathbf{κ \in Z}$

ή $\mathbf{ω = 2κπ + \frac{5π}{6}}$

Παράδειγμα 16

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{ημx + συν\left(\frac{π}{4} - x\right) = 0}$

Πραγματικά

$\mathbf{ημx + συν\left(\frac{π}{4} - x\right) = 0} \Leftrightarrow ημx = -συν\left(\frac{π}{4} - x\right) \Leftrightarrow ημx = συν\left(π - \left(\frac{π}{4} - x\right)\right)$

$\Leftrightarrow ημx = συν\left(\frac{3π}{4} + x\right) \Leftrightarrow ημx = ημ\left(\frac{π}{2} - \left(\frac{3π}{4} + x\right)\right) \Leftrightarrow \mathbf{ημx = ημ\left(-\frac{π}{4} - x\right)}$

Οπότε

$\mathbf{x = 2κπ + \left(-\frac{π}{4} - x\right)} \Leftrightarrow x = 2κπ - \frac{π}{4} - x \Leftrightarrow 2x = 2κπ - \frac{π}{4} \Leftrightarrow \mathbf{x = κπ - \frac{π}{8}}$, $\mathbf{κ \in Z}$

ή $\mathbf{x = 2κπ + π - \left(-\frac{π}{4} - x\right)} \Leftrightarrow 0x = 2κπ + \frac{5π}{4} \Leftrightarrow \mathbf{0 = 2κ + \frac{5}{4}}$ **Αδύνατη.**

Συνεπώς $\mathbf{x = κπ - \frac{π}{8}}$, $\mathbf{κ \in Z}$

Ασκήσεις

α.10● Να **λύσετε** την εξίσωση $(2-\eta\mu x)\eta\mu x(1-\eta\mu x)=0$

α.11● Να **λύσετε** την εξίσωση $2\eta\mu^2 x = 3\eta\mu x - 1$

α.12● Να **λύσετε** την εξίσωση $2\eta\mu^2 x = 3(1-\sigma\upsilon\nu x)$

α.13● Να **λύσετε** την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu^2 x$

α.14● Να **λύσετε** την εξίσωση $\eta\mu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x = 4$

α.15● Να **λύσετε** την εξίσωση $\varepsilon\varphi^2 x = \varepsilon\varphi x$

α.16● Να **λύσετε** την εξίσωση $\eta\mu x + \dfrac{1}{\eta\mu x} = 2$

α.17● Να **λύσετε** την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x + 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-1$

α.18● Να **λύσετε** την εξίσωση $\dfrac{\eta\mu^2 x - 3}{\eta\mu^2 x + 2} + \dfrac{5-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x - 2} = \dfrac{14}{\eta\mu^4 x - 4}$

α.19● Να **λύσετε** την εξίσωση $2\eta\mu^2 x + \eta\mu x - 1 = 0$

α.20● Να **λύσετε** την εξίσωση $\varepsilon\varphi^2 x + \left(\sqrt{3}-1\right)\varepsilon\varphi x - \sqrt{3} = 0$

α.21● Να **λύσετε** την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu x + 1 = 0$

α.22● Να **λύσετε** την εξίσωση $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x - 2 = 0$

α.23● Να **λύσετε** την εξίσωση $\eta\mu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right) = 0$

α.24● Να **λύσετε** την εξίσωση $2\eta\mu^3\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu^3\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right) = 1$

α.25● Να αποδείξετε ότι **δεν υπάρχει** $x \in R$, ώστε $ημ\left(2x+\frac{π}{3}\right)+συν\left(x-\frac{π}{6}\right)=2$

α.26● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημ^{15}x = 2012ημ^{14}x$

α.27● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημx = ημ25^{o}$

α.28● Αν $ημθ = 0,1$, να **προσδιορίσετε** τους x με την ιδιότητα $ημ(x-θ) = 0,1$ ως συνάρτηση του $θ$

α.29● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημ|x| = 0$

α.30● Να **λύσετε** την εξίσωση $|ημx| + |συνx| = 0$

α.31● Να **λύσετε** την εξίσωση $εφx = 2ημx$

α.32● Να **λύσετε** την εξίσωση $εφ\left(x-\frac{π}{8}\right)\ σφ(2x) = 1$

α.33● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημ^3x + ημx - 2 = 0$

α.34● Να **λύσετε** την εξίσωση $(1-συνx)^3 - συνx - 1 = 0$

α.35● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημx = |ημx|$

α.36● Να **βρείτε** τις **κοινές λύσεις** των εξισώσεων $ημx = \frac{\sqrt{3}}{2}$ και $συνx = \frac{1}{2}$

α.37● Να **λύσετε** την εξίσωση $\frac{1+συνx}{ημx} = 0$

α.38● Να **λύσετε** την εξίσωση $1+συνx = ημx$

α.39● Να **λύσετε** την εξίσωση $εφ(3x) = εφx$

α.40● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημ^3x + συν^3x = 1 - ημxσυνx$

α.41● Να **λύσετε** την ανίσωση $ημ^2x + \frac{1}{ημ^2x} \leq 2$

α.42● Να **λύσετε** την εξίσωση $ημ(ημx) = 0$

α.43● Να **λύσετε** την εξίσωση $x^2 - 2x + 2 = συν(x-1)$

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

δ Παράγοντες πολυωνύμου

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 1

Θα βρούμε τους **α , β**, ώστε το πολυώνυμο $\mathbf{P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - x - 2}$

να έχει **παράγοντες** τα διώνυμα $\mathbf{x-1}$ και $\mathbf{x-2}$

Στη συνέχεια, θα βρούμε και τις **ρίζες** του πολυωνύμου.

Απάντηση

Αφού το $\mathbf{x-1}$ είναι **παράγοντας**, πρέπει $\mathbf{P(1)=0} \Leftrightarrow \mathbf{\alpha+\beta-1-2=0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{\beta = 3-\alpha}$

Αφού το $\mathbf{x-2}$ είναι **παράγοντας**, πρέπει $\mathbf{P(2)=0} \Leftrightarrow \mathbf{8\alpha+4\beta-2-2=0}$

$\Leftrightarrow \mathbf{\beta = 1-2\alpha}$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα, έχουμε $\mathbf{3-\alpha = 1-2\alpha} \Leftrightarrow \mathbf{\alpha=-2}$ και $\mathbf{\beta=5}$

Οπότε είναι $\mathbf{P(x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2}$

-2	5	-1	-2	1
	+ -2	+ 3	+ 2	
-2	3	2	0	

Επειδή το **1** είναι ρίζα του πολυωνύμου

έχουμε $\mathbf{P(x) = (x-1)(-2x^2+3x+2)}$

-2	3	2	2
	+ - 4	+ - 2	
-2	-1	0	

Επειδή το **2** είναι ρίζα του πολυωνύμου

έχουμε $\mathbf{P(x) = (x-1)(x-2)(-2x-1)}$

Συνεπώς, οι **ρίζες** του πολυωνύμου $\mathbf{P(x)}$ είναι οι αριθμοί **1**, **2** και $\mathbf{-\frac{1}{2}}$

Θέμα 2

Θα αποδείξουμε ότι το $\mathbf{d(x) = 2x-1}$ είναι **παράγοντας** του $\mathbf{D(x) = x^5 - \frac{1}{32}}$

Απάντηση

Η διαίρεση του $\mathbf{D(x)}$ δια του $\mathbf{d(x)}$

δίνει $\mathbf{D(x) = d(x)\pi(x) + u(x)} \Leftrightarrow \mathbf{x^5 - \frac{1}{32} = (2x-1)\pi(x) + c}$

Για $\mathbf{x = \frac{1}{2}}$, έχουμε $\mathbf{0 = c}$ και συνεπώς $\mathbf{D(x) = (2x-1)\pi(x)}$

Θέμα **3**

Θα εξετάσουμε

αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x - 7\sqrt{3} - 11$ έχει **παράγοντα** το διώνυμο $x - 1 - \sqrt{3}$

Απάντηση

Είναι $P(1+\sqrt{3}) = (1+\sqrt{3})^3 + (1+\sqrt{3}) - 7\sqrt{3} - 11$

$= 1 + 3\cdot\sqrt{3} + 3\cdot 3 + 3\sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} - 7\sqrt{3} - 11$

$= 0$

Οπότε, ο αριθμός $1+\sqrt{3}$ είναι μία **ρίζα** του πολυωνύμου $P(x)$

και συνεπώς το διώνυμο $x - (1+\sqrt{3}) = x - 1 - \sqrt{3}$ είναι **παράγοντας** του $P(x)$

Θέμα **4**

Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, ώστε $P(x+1) = P(3-x)$, $x \in R$

Αν αυτό **διαιρείται** με $x - 3$, θα αποδείξουμε ότι αυτό **διαιρείται** και με $x - 1$

Απάντηση

Αφού το πολυώνυμο $P(x)$, διαιρείται δια του $x - 3$, θα είναι $P(3) = 0$

Από $P(x+1) = P(3-x)$, για $x = 2$, έχουμε $P(3) = P(1) = 0$

Οπότε, αφού το 1 είναι ρίζα του $P(x)$, αυτό θα **διαιρείται** και με $x - 1$

Θέμα **5**

Αν το διώνυμο $(x-1)(x-2)$ είναι **παράγοντας** του πολυωνύμου $P(x)$

θα αποδείξουμε ότι το $P(x)$ **διαιρείται** με τα διώνυμα $x - 1$ και $x - 2$

Απάντηση

Αφού το $(x-1)(x-2)$ είναι **παράγοντας** του πολυωνύμου $P(x)$

είναι $P(x) = (x-1)(x-2)\pi(x)$

όπου $\pi(x)$ το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x-1)(x-2)$

Επειδή $P(1) = (1-1)(1-2)\pi(1) = 0$, το $P(x)$ **διαιρείται** με το διώνυμο $x - 1$

$P(2) = (2-1)(2-2)\pi(2) = 0$, το $P(x)$ **διαιρείται** με το διώνυμο $x - 2$

Θέμα 6

Θα αποδείξουμε ότι το διώνυμο $x^2 - 1$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x) = x^4 + x^2 - 2$

Απάντηση

Ας δούμε τα πιο κάτω:

Έστω η διαίρεση του πολυωνύμου $\Delta(x)$ με το $x^2 - 1$

η οποία δίνει πηλίκο το $\pi(x)$ και υπόλοιπο γενικής μορφής $u(x) = ax + b$

Τότε είναι $\Delta(x) = (x^2 - 1)\pi(x) + ax + b$

Είναι $\Delta(1) = (1 - 1)\pi(1) + a + b \Leftrightarrow 0 = a + b \Leftrightarrow a = -b \Leftrightarrow b = 0,\ a = 0$

Είναι $\Delta(-1) = (1 - 1)\pi(-1) - a + b \Leftrightarrow 0 = -a + b \Leftrightarrow a = b$

Συνεπώς $u(x) = 0$

Δηλαδή, διαπιστώσαμε ότι το διώνυμο $x^2 - 1$ είναι παράγοντας του $\Delta(x)$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής:

Με βάση το σχήμα Horner $\Delta(x) = x^4 + x^2 - 2$

1	0	1	0	-2	1
	+ 1	+ 1	+ 2	+ 2	
1	1	2	2	0	

είναι $\Delta(x) = (x - 1)(x^3 + x^2 + 2x + 2)$

Με βάση το σχήμα Horner

είναι $x^3 + x^2 + 2x + 2 = (x + 1)(x^2 + 2)$

1	1	2	2	-1
	+ -1	+ 0	+ -2	
1	0	2	0	

Συνεπώς είναι $\Delta(x) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 2) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

Έτσι διαπιστώσαμε, ότι το διώνυμο $x^2 - 1$ είναι **παράγοντας** του $\Delta(x)$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής:

Εκτελούμε την Ευκλείδεια διαίρεση

του $\Delta(x)$ με το $x^2 - 1$

και βρίσκουμε υπόλοιπο 0

Συνεπώς $\Delta(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^4 & +\ x^2 & -\ 2 & & x^2 - 1 \\ \cline{5-5}
-x^4 & +\ x^2 & & & x^2 + 2 \\
0 & +\ 2x^2 & -2 & & \\
 & -\ 2x^2 & +2 & & \\
 & & 0 & &
\end{array}
$$

Θα μπορούσαμε να κινηθούμε και ως εξής:

Για να διαιρείται το $\Delta(x) = x^4 + x^2 - 2$ **ακριβώς** με το $x^2 - 1$

αρκεί να υπάρχουν $a, b, c \in R$, ώστε $\Delta(x) = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$

$$\Leftrightarrow x^4 + x^2 - 4 = (x^2 - 1)(ax^2 + bx + c)$$

Μετά από πράξεις, καταλήγουμε ότι $a = 1$, $b = 0$ και $c = 2$

Δηλαδή, $\Delta(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2)$ και έτσι διαπιστώνουμε ότι διαιρείται με το $x^2 - 1$

Ασκήσεις

δ.12● Να αποδείξετε ότι τα διώνυμα $x-1$, $x+1$, x^2-1 και x^4+x^2+1 είναι **παράγοντες** του πολυωνύμου $\Pi(x)=x^6-1$

δ.13● Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=(x+1)^{2\nu}-x^{2\nu}-2x-1$, $\nu\in N$, $n>1$ έχει ως **παράγοντες** όλους τους **παράγοντες** του $Q(x)=2x^3+3x^2+x$

δ.14● Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, ώστε $P(3x+1)=P(x-3)$

α) Αν αυτό **διαιρείται** με $x-1$, τότε αυτό **διαιρείται** και με $x+3$

β) Αν ο **σταθερός όρος** του πολυωνύμου είναι 20, τότε **δεν διαιρείται** με $x-10$

δ.15● Αν για κάποιο πολυώνυμο $P(x)$ **τετάρτου** βαθμού είναι $P(-x)=P(x)$ και $P(0)=0$, να αποδείξετε ότι το x^2 είναι **παράγοντας** του $P(x)$

δ.16● Έστω το πολυώνυμο $P(x)$, ώστε $P(x^2+x-1)=x^5+x-2$, $x\in R$
Να αποδείξετε ότι το $x-1$ είναι **παράγοντάς** του.

δ.17● Να αποδείξετε ότι το $x-2$ **διαιρεί** το πολυώνυμο $P(x)=\left(\left(x^2-3\right)^3+1\right)^2-4$

δ.18● Αν το $x-3$, **διαιρεί** το πολυώνυμο $P(x)=\left(\left(x^2-8\right)^2+\alpha\right)^3-\frac{8}{3}x$
να αποδείξετε ότι $\alpha=1$

δ.19● Αν το $x-1$, **διαιρεί** το πολυώνυμο $P(x)=\left((x+1)^3-7\alpha\right)^2-\alpha^3x$, $\alpha>1$
να αποδείξετε ότι $\alpha^3-49\alpha^2+112\alpha-64=0$ και μετά ότι $\alpha^2-48\alpha+64=0$

δ.20● Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(x+1)^3+(x+1)^2-\kappa^3-\kappa^2$ με $\kappa\in R$
Να αποδείξετε ότι το διώνυμο $x-\kappa+1$ είναι **παράγοντας** του $P(x)$

δ.21● Να βρείτε τους α,β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3\alpha x^2+3\beta x-1$ να **διαιρείται** με το $(x-1)^2$

δ.22● Έστω το πολυώνυμο $P(x)$ ώστε $P(x-1)+P(x^2-1)=x^2+x-2$
Να αποδείξετε ότι το μονώνυμο x **διαιρεί** το πολυώνυμο $P(x)$

δ.23● Έστω το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-2\alpha x-8\alpha^2 \ldots \alpha$ μη μηδενικός ακέραιος
Να αποδείξετε ότι το $x-2\alpha$ είναι **παράγοντας** του $P(x)$
Μετά να βρείτε και τον άλλον παράγοντα του πολυωνύμου $P(x)$

δ.24● Να βρείτε τους α,β, ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$
να έχει **παράγοντες** τα διώνυμα $x+1$ και $x-2$
και στη συνέχεια να βρείτε τις **ρίζες** του πολυωνύμου.

δ.25● Να βρείτε την **τιμή** της **θετικής** παραμέτρου λ
ώστε το διώνυμο $x+2$, να **διαιρεί** το $P(x)=\lambda^3x^3+2(\lambda^2-3\lambda+1)x+4$

δ.26● Να βρείτε τον $\lambda\in R$, ώστε το $x+\lambda$ να **διαιρεί** το $P(x)=x^3-x^2+3x-10$

δ.27● Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=2x^6+a^4x^4+a^2x^2-2ax-1$, $a\in R$
δεν μπορεί να έχει **παράγοντα** το διώνυμο $x-1$

δ.28● Έστω το πολυώνυμο $P(x)=x^3+ax^2+2bx-4$
Να **βρείτε** τους πραγματικούς αριθμούς a,b
ώστε το τριώνυμο $t(x)=x^2-3x+2$ να είναι **παράγοντας** του πολυωνύμου $P(x)$

δ.29● Αν το $x+\alpha$ είναι **παράγοντας** του $P(x)=x^\nu+\alpha^\nu$, $\nu\in N^*$, $\alpha\neq 0$
να αποδείξετε ότι $\nu=2\kappa+1$, $\kappa\in N$
Μετά, να αποδείξετε ότι $\left(x^\nu+\alpha^\nu\right)=(x+\alpha)\left(x^{\nu\text{-}1}-x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^2-\ldots+\alpha^{\nu-1}\right)$

δ.30● Έστω τα πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^{\nu+1}+\beta x^\nu+1$, $\nu\in N$ και $\alpha,\beta\in R$
Γνωρίζουμε ότι έχει **παράγοντα** το $\pi(x)=x^2-2x+1$
Να αποδείξετε ότι $\alpha=\nu$ και $\beta=-1-\nu$
Αν το $P(x)$ έχει ένα **μόνο** ακόμη **παράγοντα**, τον $x-\alpha$, $\alpha>1$, δείξτε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$

δ.31● Αν το $P(x)=(n+1)x^n-nx^{n+1}+a$, $n\in N$ και $a\in Z$, **διαιρείται** με $x-1$
θα **διαιρείται** και με $(x-1)^2$

δ.32● Αν το $P(x)=2\alpha x^3+2(\alpha+\gamma)x^2+2\beta x-2\gamma+2$ έχει **παράγοντες** όλους
τους **πρωτοβάθμιους παράγοντες** του $Q(x)=x^3-x$, να **βρείτε** τα α, β, γ

ΕΚΘΕΤΙΚΗ- ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

θ Θεωρητικά θέματα

Ας δούμε τα πιο κάτω θέματα.

Θέμα 1

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = x^5 + x - 2}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

Μετά, θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{\ln^5 x + \ln x - 2 = 0}$

Απάντηση

Έστω $\mathbf{x_1, x_2 \in R}$, με $\mathbf{x_1 < x_2}$

Είναι $\mathbf{x_1^5 < x_2^5}$

Με πρόσθεση είναι $x_1^5 + x_1 < x_2^5 + x_2$ ή τελικά $x_1^5 + x_1 - 2 < x_2^5 + x_2 - 2$

Δηλαδή $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ και συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

Οπότε, η εξίσωση $\mathbf{\ln^5 x + \ln x - 2 = 0}$, $\mathbf{x > 0}$

γίνεται $\mathbf{f(\ln x) = 0}$ $\Leftrightarrow$ $f(\ln x) = f(1)$ $\Leftrightarrow$ $\ln x = 1$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = e}$

Θέμα 2

Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = e^{x-2} + x - 3}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R}$

Μετά, θα **λύσουμε** την ανίσωση $\mathbf{e^{\ln x - 2} + \ln x - 3 < 0}$

Απάντηση

Έστω οι τυχόντες $\mathbf{x_1, x_2 \in R}$, με $\mathbf{x_1 < x_2}$

Είναι $\mathbf{x_1 - 2 < x_2 - 2}$ και συνεπώς $\mathbf{e^{x_1 - 2} < e^{x_2 - 2}}$

και με πρόσθεση είναι $\mathbf{e^{x_1-2} + x_1 < e^{x_2-2} + x_2}$ και $\mathbf{e^{x_1-2} + x_1 - 3 < e^{x_2-2} + x_2 - 3}$

Δηλαδή $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$ και συνεπώς η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα**.

Οπότε, η ανίσωση $\mathbf{e^{\ln x - 2} + \ln x - 3 < 0}$, με $\mathbf{x > 0}$

γίνεται $\mathbf{f(\ln x) < 0}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{f(\ln x) < f(2)}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\ln x < 2}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{0 < x < e^2}$

Θέμα 3

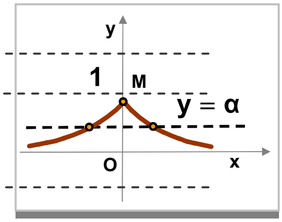
Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^{x} & \text{αν} \quad x \le 0 \\ e^{-x} & \text{αν} \quad x > 0 \end{cases}$

Θα **παραστήσουμε** στο επίπεδο, τη συνάρτηση f

Μετά

θα βρούμε το **πλήθος** των **ριζών** της εξίσωσης $f(x)=\alpha$, για τις τιμές του $\alpha \in R$

Απάντηση



Η γραφική της παράσταση

φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να παρατηρήσουμε ότι $e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$

Να παρατηρήσουμε ότι το **πλήθος λύσεων** της εξίσωσης $f(x)=\alpha$

είναι και το **πλήθος** των **σημείων τομής** των **γραφικών παραστάσεων** των f , g

Είναι προφανές ότι

- αν $\alpha > 1$, η ευθεία $y=\alpha$ **δεν τέμνει** την C_f
  και συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.
- αν $\alpha = 1$, η ευθεία $y=\alpha$ **τέμνει** την C_f σε **ένα σημείο**
  και συνεπώς η εξίσωση έχει **μοναδική** λύση.
- αν $0<\alpha<1$, η ευθεία $y=\alpha$ **τέμνει** την C_f σε **δύο σημεία**
  και συνεπώς η εξίσωση έχει **δύο λύσεις**.
- αν $\alpha \le 0$, η ευθεία $y=\alpha$ **δεν τέμνει** την C_f
  και συνεπώς η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

Θέμα 4

Αν οι θετικοί αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ είναι **διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου**

θα αποδείξουμε

ότι οι $\ln\alpha_1,\ \ln\alpha_2,\ \ln\alpha_3, \ldots$ είναι **διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου**.

Απάντηση

Αφού οι αριθμοί $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots$ είναι **διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου**

θα είναι $\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu = \lambda$

Οπότε $\ln(\alpha_{\nu+1} : \alpha_\nu) = \ln\lambda$ ή $\ln\alpha_{\nu+1} - \ln\alpha_\nu = \ln\lambda$

που σημαίνει ότι

οι $\ln\alpha_1,\ \ln\alpha_2,\ \ln\alpha_3, \ldots$ είναι **διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου**.

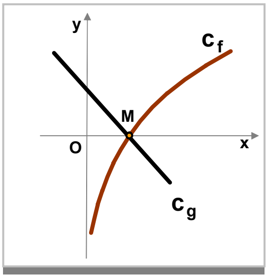
Θέμα 5

Έστω οι συναρτήσεις $\mathbf{f(x) = \ln x}$, $\mathbf{x > 0}$ και $\mathbf{g(x) = -x + 1}$, $\mathbf{x \in R}$

Θα αποδείξουμε ότι τα διαγράμματα αυτών **τέμνονται μόνο** στο **σημείο** $\mathbf{M(1,0)}$

Θα τις **παραστήσουμε** στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Απάντηση



Έστω η συνάρτηση $\mathbf{h(x) = f(x) - g(x) = \ln x + x - 1, x > 0}$

Η $\mathbf{h}$ είναι προφανώς **γνήσια αύξουσα**.

Οπότε, $\mathbf{h(x) = 0} \;\Leftrightarrow\; h(x) = h(1) \;\Leftrightarrow\; \mathbf{x = 1}$

Δηλαδή τότε είναι $\mathbf{f(1) = g(1)}$

Συνεπώς, τα διαγράμματα αυτών **τέμνονται μόνο** στο **σημείο M** με τετμημένη **1**

Θέμα 6

Θα αποδείξουμε ότι $\mathbf{\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{100}\right)=-2}$

Απάντηση

Είναι $\mathbf{\log\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log\left(1-\frac{1}{3}\right)+\log\left(1-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\log\left(1-\frac{1}{100}\right)}$

$$=\log\left(\frac{1}{2}\right)+\log\left(\frac{2}{3}\right)+\log\left(\frac{3}{4}\right)+\ldots+\log\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{99}}{100}\right)$$

$$=\log\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$=\log 1-\log 100$$

$$=-\mathbf{2}$$

Θέμα 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2\log(x+3) - \log(ax)$, $a < 0$

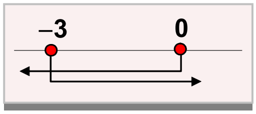
Θα προσδιορίσουμε το **ευρύτερο υποσύνολο** του R στο οποίο **ορίζεται** η f για τις διάφορες τιμές της αρνητικής παραμέτρου a

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει **μοναδική ρίζα**.

Απάντηση

Πρέπει $x + 3 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3$

$ax > 0$ και $x < 0$ ....αφού $a < 0$



Δηλαδή το πεδίο ορισμού της f είναι το $A_f = (-3,0)$

Θα λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 0$, $x \in (-3,0)$

Είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\log(x+3) - \log(ax) = 0 \Leftrightarrow \log(x+3)^2 = \log(ax)$

$\Leftrightarrow (x+3)^2 = ax$

$\Leftrightarrow x^2 + (6-\alpha)x + 9 = 0 \quad (*)$

Είναι $\Delta = \alpha^2 - 12\alpha = \alpha(\alpha - 12) > 0$, αφού $\alpha < 0$

Συνεπώς, η εξίσωση $(*)$ έχει δύο άνισες ρίζες, έστω τις $r_1 < r_2$

Επειδή $r_1 r_2 = 9 > 0$ ...Ρίζες **ομόσημες**

και $r_1 + r_2 = a - 6 < 0$, οι ρίζες r_1, r_2 θα είναι προφανώς **αρνητικές**.

Να τονίσουμε τώρα, ότι αποκλείεται να είναι δεκτές και οι δύο

Πραγματικά

Αν ήταν δεκτές και οι δύο, θα έπρεπε να είναι $-3 < r_1 < 0$ και $-3 < r_2 < 0$

προσθέτοντας κατά μέλη

έχουμε $-6 < r_1 + r_2 < 0 \Leftrightarrow -6 < a - 6 < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 6$ ...Άτοπο

Να τονίσουμε επίσης
ότι για τη μεγαλύτερη των ριζών

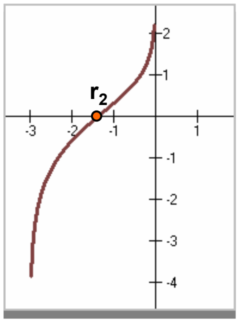
την r_2, **είναι** $-3 < r_2 = \dfrac{\alpha - 6 + \sqrt{\alpha^2 - 12\alpha}}{2} < 0$

αφού ισοδύναμα έχουμε

$-6 < \alpha - 6 + \sqrt{\alpha^2 - 12\alpha} < 0 \Leftrightarrow -\alpha < \sqrt{\alpha^2 - 12\alpha} < 6 - \alpha$

$\Leftrightarrow \alpha^2 < \alpha^2 - 12\alpha < \alpha^2 - 12\alpha + 36$

$\Leftrightarrow 12\alpha < 0 < 36$ ...**Προφανές**



Καταλήξαμε λοιπόν, ότι η f έχει μοναδική ρίζα, την r_2

Θέμα 8

Αν $\log_6 8 = \alpha$, θα **υπολογίσουμε** πρώτα τον αριθμό $\log_2 3$, ως συνάρτηση του α και μετά θα **υπολογίσουμε** τον αριθμό $\log_{16} 12$

Απάντηση

Από $\log_6 8 = \alpha$ είναι $\log_6 2^3 = \alpha \Leftrightarrow 3\log_6 2 = \alpha \Leftrightarrow \log_6 2 = \dfrac{\alpha}{3}$

Από τον **τύπο αλλαγής βάσης**, είναι και $\dfrac{\log_2 2}{\log_2 6} = \dfrac{\alpha}{3} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 6} = \dfrac{\alpha}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 3} = \frac{\alpha}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + \log_2 3} = \frac{\alpha}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \alpha + \alpha\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \frac{3-\alpha}{\alpha} = \log_2 3$$

Είναι προφανές ότι $\alpha \neq 0$, αφού $\alpha = \log_6 8 > 0$

Τώρα $\log_{16} 12 = \log_{16} 3 + \log_{16} 4$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 16} + \frac{\log_2 4}{\log_2 16}$$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 2^4} + \frac{\log_2 4}{\log_2 2^4}$$

$$= \frac{\log_2 3}{\log_2 2^4} + \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^4}$$

$$= \frac{\log_2 3}{4\log_2 2} + \frac{2\log_2 2}{4\log_2 2}$$

$$= \frac{\log_2 3}{4} + \frac{2}{4}$$

Συνεπώς $\log_{16} 12 = \dfrac{2 + \log_2 3}{4}$

Θέμα 9

Αν $a,b,c>10$ και $b=10^{\frac{1}{1-\log a}}$, $c=10^{\frac{1}{1-\log b}}$, θα δείξουμε ότι $a=10^{\frac{1}{1-\log c}}$

Απάντηση

Αφού $b=10^{\frac{1}{1-\log a}}$ είναι και $\log b=\log\left(10^{\frac{1}{1-\log a}}\right)\Leftrightarrow \log b=\frac{1}{1-\log a}\log 10$

$$\Leftrightarrow \log b=\frac{1}{1-\log a}$$

$$\Leftrightarrow (1-\log a)\log b=1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\log b-\log b\log a=1}$$

Αφού $c=10^{\frac{1}{1-\log b}}$, εντελώς όμοια καταλήγουμε ότι $\boxed{\log c-\log c\log b=1}$

και $\boxed{\log a-\log a\log c=1}$

Τώρα, από $\log b-\log b\log a=1$ και $\log c-\log c\log b=1$

αφαιρώντας έχουμε $\log b-\log b\log a-\log c+\log c\log b=0$

$\Leftrightarrow \log b(1-\log a+\log c)=\log c \Leftrightarrow \log b=\dfrac{\log c}{1-\log a+\log c}$

Έτσι, η σχέση $\boxed{\log c-\log c\log b=1}$, γίνεται $\log c-\log c\dfrac{\log c}{1-\log a+\log c}=1$

$$\Leftrightarrow \frac{\log c-\log c\log a+\log^2 c-\log^2 c}{1-\log a+\log c}=1$$

$$\Leftrightarrow \log c-\log c\log a=1-\log a+\log c$$

$$\Leftrightarrow -\log c\log a=1-\log a$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\log a-\log a\log c=1}$$

Ας δούμε και τα επόμενα θέματα.

Θέμα **10**

Έστω η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \sqrt{x} + \ln x}$, $\mathbf{x > 0}$

α) Θα αποδείξουμε πρώτα, ότι αυτή είναι **γνήσια αύξουσα**.

β) Θα **λύσουμε** την **εξίσωση** $\mathbf{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1} = \ln(2x-1) - \ln x}$

Απάντηση

α) Αν $\mathbf{x_1, x_2 > 0}$ με $\mathbf{x_1 < x_2}$, τότε είναι και $\sqrt{\mathbf{x_1}} < \sqrt{\mathbf{x_2}}$ όπως και $\mathbf{\ln x_1 < \ln x_2}$

Με πρόσθεση κατά μέλη, είναι $\ln x_1 + \sqrt{x_1} < \ln x_2 + \sqrt{x_2}$ ή $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$

Δηλαδή η $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{(0,+\infty)}$

β) Η εξίσωση $\mathbf{\sqrt{x} - \sqrt{2x-1} = \ln(2x-1) - \ln x}$

ισοδύναμα γράφεται και σαν $\sqrt{x} + \ln x = \sqrt{2x-1} + \ln(2x-1)$ ή $\mathbf{f(x) = f(2x-1)}$

Πρέπει προφανώς, όχι μόνο να είναι $\mathbf{x > 0}$, αλλά και $\mathbf{2x - 1 > 0}$ ή $\mathbf{x > \frac{1}{2}}$

Επειδή η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι **γνήσια αύξουσα**

η ισότητα $\mathbf{f(x) = f(2x-1)}$ γράφεται ισοδύναμα και $\mathbf{x = 2x - 1}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 1}$ Δεκτή.

Θέμα **11**

Θα **λύσουμε** την εξίσωση $\mathbf{x^{2x} = 1}$

Απάντηση

Πρέπει προφανώς να είναι $\mathbf{x \neq 0}$ …αφού το $\mathbf{0^0}$ είναι απροσδιοριστία.

Αν $\mathbf{x \in (0,+\infty)}$

η εξίσωση γίνεται $\mathbf{x^{2x} = 1}$ $\Leftrightarrow$ $\ln(x^{2x}) = \ln 1$ $\Leftrightarrow$ $2x\ln x = 0$ $\Leftrightarrow$ $\cancel{\mathbf{x = 0}}$ Απορρίπτεται

$\mathbf{\ln x = 0}$ ή $\mathbf{x = 1}$

Αν $\mathbf{x \in (-\infty,0)}$

για να ορίζεται η δύναμη $\mathbf{x^{2x} = 1}$

πρέπει ο $\mathbf{x}$ να είναι αρνητικός ακέραιος και θέτοντας $\mathbf{x = -v}$, $\mathbf{v \in N}$

η εξίσωση $\mathbf{x^{2x} = 1}$

γίνεται $\mathbf{(-v)^{-2v} = 1}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{v^{2v}} = 1$ $\Leftrightarrow$ $1 = v^{2v}$ $\Leftrightarrow$ $\ln 1 = \ln(v^{2v})$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{2v\ln v = 0}$

$\mathbf{v = 0}$ ή $\mathbf{v = 1}$ και συνεπώς $\mathbf{x = -1}$ ή $\cancel{\mathbf{x = 0}}$ Απορρίπτεται.

Θέμα 12

Έστω οι **γνησίως αύξουσες** συναρτήσεις $\mathbf{f, g}$

α) Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{h = f + g}$ είναι **γνησίως αύξουσα**.

β) Έστω τώρα και η συνάρτηση $\mathbf{F(x) = x + \ln x - 1}$

Θα αποδείξουμε ότι η $\mathbf{F}$ είναι **γνησίως αύξουσα**.

γ) Αφού διαπιστώσουμε ότι το $\mathbf{1}$ είναι μία **ρίζα** της $\mathbf{F}$
μετά θα διαπιστώσουμε ότι **υπάρχει μοναδικός** $\mathbf{A > -1}$, ώστε $\mathbf{\ln(A+1) + A = 0}$

δ) Θα βρούμε τα **διαστήματα**, όπου η $\mathbf{C_F}$ είναι «**πάνω**» ή «**κάτω**» από τον $\mathbf{x'x}$

Απάντηση

α) Επειδή η $\mathbf{f}$ είναι γνήσια αύξουσα, από $\mathbf{x_1 < x_2}$, είναι $\mathbf{f(x_1) < f(x_2)}$

Επειδή η $\mathbf{g}$ είναι γνήσια αύξουσα, από $\mathbf{x_1 < x_2}$, είναι $\mathbf{g(x_1) < g(x_2)}$

είναι και $f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$ ή $(f+g)(x_1) < (f+g)(x_2)$ ή $\mathbf{h(x_1) < h(x_2)}$

Οπότε, η $\mathbf{h}$ είναι **γνήσια αύξουσα**.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνήσια αύξουσα στο R_+^*
όπως και η συνάρτηση $g(x) = x - 1$ είναι γνήσια αύξουσα στο R

Συνεπώς και το **άθροισμά** τους
η συνάρτηση $\mathbf{F(x) = e^x + x - 1}$, είναι **γνήσια αύξουσα** στο $\mathbf{R_+^*}$

γ) Είναι $\mathbf{F(1) = 1 + \ln 1 - 1 = 0}$

Τώρα είναι $\mathbf{\ln(A+1) + A = 0}$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{\ln(A+1) + (A-1) + 1 = 0}$

$\Leftrightarrow F(A+1) = 0$

$\Leftrightarrow \mathbf{F(A+1) = F(1)}$ …αφού η f είναι γνήσια αύξουσα.

$\Leftrightarrow \mathbf{A + 1 = 1}$

$\Leftrightarrow \mathbf{A = 0}$

δ) Ισχύει $\mathbf{F(x) > 0}$ $\Leftrightarrow$ $F(x) > F(1)$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{x > 1}$

Οπότε, η γραφική παράσταση $\mathbf{C_F}$, είναι «**πάνω**» από τον $\mathbf{x'x}$ στο $\mathbf{(1, +\infty)}$

Όμοια, διαπιστώνουμε ότι η $\mathbf{C_F}$, είναι «**κάτω**» από τον $\mathbf{x'x}$ στο $\mathbf{(0, 1)}$

Ασκήσεις

θ.38● Αν $a^2 + \ln^2 b - 2a\ln b + \ln^2(ab) - 2\ln(ab) + 1 = 0$

αφού διαπιστώσετε ότι $a = \ln b$ και $\ln(ab) = 1$, μετά να αποδείξετε ότι $a = 1$, $b = e$

θ.39● Αν $a^x b^x = \ln c$, $a,b,c > 1$, **για κάθε** $x > 0$, να αποδείξετε ότι $ab = 1$, $c = e$

θ.40● Αν $\alpha = \ln\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)$, $\alpha > 0$, $-1 < \beta < 1$, να αποδείξετε ότι $\beta = \frac{e^{\alpha} - 1}{e^{\alpha} + 1}$

θ.41● Αν $b\ln a = a\ln b$ και $\ln a = \ln 2 + \ln b$, $a,b > 0$, να δείξετε ότι $a = 4$, $b = 2$

θ.42● Έστω ότι $x\ln 10 + 10\ln x = \ln 10$ και $x\ln 5 + 5\ln x = \ln 5$, $x > 0$

Να αποδείξετε ότι $x = 1$

θ.43● Αν γνωρίζουμε ότι $\ln(\ln k) + \ln k = 0$, $k > 1$, να αποδείξετε ότι $k^k = e$

θ.44● Έστω οι αριθμοί a,b, ώστε $a > b > 0$, με $a\ln b = b\ln a$

α) Να αποδείξετε ότι $b^a = a^b$

β) Αν τώρα είναι και $a^a = b^b$, να αποδείξετε ότι $a = b$

θ.45● Έστω οι αριθμοί a,b, με $a > b > 0$, ώστε να είναι $a^{3\ln b} = b^{2\ln a}$

Να αποδείξετε ότι $a = 1$ ή $b = 1$

θ.46● Έστω οι αριθμοί a,b, με $a > b > 0$, ώστε $a^b b^a = 1$

α) Να αποδείξετε ότι $b\ln a + a\ln b = 0$

β) Αν τώρα είναι και $a\ln a + b\ln b = 0$, να αποδείξετε ότι $a = b = 1$

θ.47● Έστω η εξίσωση $x^2 - (1 + \ln\lambda)x + \ln^3\lambda = 0$, $\lambda > 0$

Να βρείτε την **τιμή** του λ, ώστε η εξίσωση να έχει **δύο ίσες** πραγματικές **ρίζες**.

θ.48● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x\ln(2x) + \ln(2x)\ln(4x) = 2\ln^2 2$

έχει σαν **λύσεις**, **μόνο** τους αριθμούς 1 και $\frac{1}{4}$

θ.49● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^x = -1$ έχει **μοναδική λύση** την $x = -1$

θ.50● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{2x} = -1$ είναι **αδύνατη**.

θ.51● Να αποδείξετε ότι $(2x^2 - x)^{2x} = -1 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

θ.52● Να αποδείξετε ότι $(x^2 - 5x + 5)^{x+2} = 1 \Leftrightarrow x \in \{-2,1,2,4\}$

θ.53● Να αποδείξετε ότι στο σύνολο $\mathbf{Z}$, η εξίσωση $27x^x = -1$ έχει μία **λύση**, το -3

θ.54● Αν για τους $m,n \in N^*$ είναι $n^n = m^m$, να αποδείξετε ότι $n = m$

θ.55● Αφού αποδείξετε ότι $\ln x \ln(2x)\ln(3x) = \ln^3 x + \ln 6 \ln^2 x + \ln 2 \ln 3 \ln x$, $x > 0$

μετά να **λύσετε** την εξίσωση $\ln^3 x + \ln 6 \ln^2 x + \ln 2 \ln 3 \ln x = 0$

θ.56● Να **συγκρίνετε** τους $A = \ln(a^2 + 2)$, $B = \ln 2 + \ln a$, $\Gamma = \ln\left(\dfrac{1}{a^2 + 2}\right)$, $a > 0$

θ.57● Να αποδείξετε την **ισοδυναμία** $x^2 - x\ln 10 + \ln(2^{\ln 5}) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2,\ x = \ln 5$

θ.58● Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2^n = n - 1$, $n \in N^*$ είναι **αδύνατη**.

Έστω τώρα, το **μη σταθερό πολυώνυμο** $P(x) = x^{2n} - nx^n + n - 1$, $n \in N^*$

Να αποδείξετε ότι **δεν υπάρχει** n, ώστε το $P(x)$ να δέχεται ως **ρίζα** το 2

θ.59● Έστω η ορισμένη στο $D = (0,1)$ συνάρτηση f, ώστε $f^2(x) - 2f(x) + \ln x = 0$

και $f(x) > 0$, για κάθε $x \in D$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 1 + \sqrt{1 - \ln x}$

θ.60● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x\log a + \log a$, $a > 0$

Γνωρίζουμε ότι η **γραφική παράσταση** C_f **τέμνει** τον άξονα $x'x$

α) Να αποδείξετε ότι $a \in (0,1] \cup [10,+\infty)$

β) Αν η f παρουσιάζει **ελάχιστο** στο 1, να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$

θ.61● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x\log n - 1$, $n \in N^*$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι **γνήσια αύξουσα**.

β) Αν η f δέχεται **ακέραια ρίζα**, να αποδείξετε ότι αυτή είναι το 1 και μάλιστα είναι και **μοναδική**.

θ.62● Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$

α) Να βρείτε το **ευρύτερο υποσύνολο** D του R, στο οποίο **ορίζεται**.

β) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι **άρτια**.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \neq 0$, για κάθε $x \in D$

θ.63● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + (1 - \log a)x^2 + x\log a - 2\log^2 a$, $\sqrt[8]{10} < a < 10^{12}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει **μοναδική ρίζα** το $\log a$

Έστω και η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 2x\log a - 2\log^2 a$

β) Να αποδείξετε ότι τα διαγράμματα C_f, C_g **τέμνονται** μόνο «**πάνω**» στον $y'y$

θ.64● Έστω οι συναρτήσεις f και φ, με τύπους $\varphi(x) = \frac{x}{\ln x}$, $f(x) = \ln(\varphi(x))$

α) Να αποδείξετε ότι το **ευρύτερο υποσύνολο** του R στο οποίο ορίζεται η f είναι το διάστημα $\Delta = (1,+\infty)$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \varphi(x)$ είναι **αδύνατη**.

θ.65● Έστω η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$, ορισμένη στο $(0,+\infty)$

α) Να αποδείξετε ότι αυτή είναι **γνήσια αύξουσα**.

β) Να αποδείξετε την **ισοδυναμία** $x - e = 1 - \ln x \iff x = e$